Aufgabenangebot zum mathematischen Begründen in je zwei aktuellen Mathematikbüchern

Esther Brunner, Romaine Jullier und Jonas Lampart
Pädagogische Hochschule Thurgau

Begründen gilt als zentrale mathematische Kompetenz. Damit diese von den Lernenden aufgebaut werden kann, ist ein entsprechendes Aufgabenangebot notwendig, das im Mathematikunterricht grösstenteils durch Schulbücher bereitgestellt wird. Es interessiert deshalb, wie das Aufgabenangebot in den Schulbüchern gestaltet ist. Die vorliegende Studie zeigt für je zwei verschiedene Lehrwerke für das fünfte bzw. das achte Schuljahr auf, wie gross der Anteil genuiner Begründungsaufgaben im Vergleich zum gesamten Aufgabenangebot ausfällt und welche Kompetenzbereiche dies betrifft. Die Ergebnisse zeigen eine Diskrepanz zwischen dem Anspruch nach angemessener Förderung dieser Kompetenz und dem vorhandenen Aufgabenangebot.

Einleitung

Der Aufbau mathematischer Argumentations- und Begründungskompetenz wird in den Lehrplänen (CIIP, 2010; D-EDK, 2016; Kultusministerkonferenz [KMK], 2005; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) als zentraler Bestandteil der mathematischen Bildung der obligatorischen Schulzeit ausgewiesen und gehört somit für alle Lernenden zum Pflichtprogramm. Damit sie diese anspruchsvolle Kompetenz aufbauen können, sind entsprechende Aufgabenstellungen notwendig. Im Mathematikunterricht wird das Aufgabenangebot grösstenteils über die Verwendung von Schulbüchern bereitgestellt (Rezat, 2009; Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt & Housang, 2002). Daher ist es wichtig, zu wissen, inwiefern das in den Schulbüchern vorhandene Aufgabenangebot Möglichkeiten bietet, mathematisches Argumentieren und Begründen zu fördern.

Schulbuchverlage nehmen laut Selbstdeklaration in den neuesten Ausgaben und Neubearbeitungen zwar auf die Bildungsstandards (D-EDK, 2016) Bezug und geben an, diese in ihren Lehrwerken angemessen zu berücksichtigen, doch ob dies tatsächlich der Fall ist, wurde bis anhin noch nicht systematisch

DOI 10.24452/sjer.41.3.6 ISSN 1424-3946

geprüft. Betrachtet man die vorliegenden empirischen Untersuchungen zur Aufgabenkultur am Beispiel von Klassenarbeiten[1] aus dem Fach Mathematik (Drüke-Noe, 2014), liegt die Vermutung nahe, dass Aufgaben zur Förderung der Argumentations- und Begründungskompetenz nach wie vor eher selten vertreten sein dürften. Den vorliegenden Befunden zufolge werden in Prüfungen kaum Aufgaben gestellt, die mathematisches Argumentieren erfordern, wohingegen das technische Arbeiten im Sinne von Operieren durchwegs stark fokussiert wird (Drüke-Noe, 2014). Diese Befunde zeigen sich auch für Mathematikbücher in anderen Ländern. In vielen Mathematiklehrmitteln ist das Angebot an Kalkülaufgaben nach wie dominierend, während Aufgaben zum mathematischen Argumentieren und Begründen selten sind (z. B. Glasnovic Gracin, 2018). Auch wenn die internationale Lehrmittelforschung mittlerweile vielfältige empirische Befunde vorlegen kann, fehlen genaue Angaben und Analysen von Schweizer Mathematiklehrmitteln, insbesondere im Zusammenhang mit der Einführung der neuen Bildungsstandards. Es stellt sich die Frage, ob und inwiefern die Einführung der Bildungsstandards in der Schweiz tatsächlich einen Niederschlag im Aufgabenangebot von Schulbüchern gefunden hat. Hier setzt die Studie «MaBeLL-LA» («Mathematisches Begründen lehren und lernen: Lehrmittelanalyse») der Pädagogischen Hochschule Thurgau (Brunner, 2017) an. Im Rahmen einer Analyse des vollständigen Aufgabenangebots von je zwei verschiedenen Schulbüchern für die fünfte bzw. die achte Klasse wurde u.a. untersucht, welcher Anteil der Aufgaben auf die Kompetenz des mathematischen Argumentierens bzw. Begründens abzielt und in welchen Kompetenzbereichen dies erfolgt.

Mathematisches Argumentieren und Begründen lehren und lernen

Was versteht man genau unter mathematischem Argumentieren bzw. Begründen? Welches Aufgabenangebot ist notwendig, um diese Kompetenz fördern zu können? Diese zwei Fragen lassen sich auf der Basis von theoretischen und empirischen Grundlagen klären.

Begriffsklärung

Die Begriffe rund um mathematisches Begründen werden in der Literatur nicht einheitlich definiert (Reid & Knipping, 2010). Im Rahmen dieser Studie wird «mathematisches Begründen» als Oberbegriff für ein Spektrum von spezifischen Tätigkeiten verstanden, die sich auf einem Kontinuum zwischen «Argumentieren» und «Beweisen» ansiedeln lassen (Brunner, 2014). Kennzeichnend für mathematisches Begründen ist, dass es auf das Erkennen und Erklären von mathematischen Zusammenhängen und Regelmässigkeiten abzielt. Eine Behauptung oder Vermutung soll mithilfe einer logisch gültigen Schlussfolgerung begründet, bestätigt oder widerlegt werden (Stylianides, 2007). Mathematisches Begründen unterscheidet sich deshalb von Argumentieren in Alltagskontexten (Reiss, 2002) und verlangt zwingend nach mathematischen Argumenten, d.h. nach Argumenten, die aus der Mathematik selbst stammen. Mathematische Begründungen müssen auf gesicherte Aussagen zurückgreifen, akzeptierten Schlussregeln folgen, nachvollziehbar repräsentiert sein und in einem sozialen Prozess als gültig anerkannt werden (Jahnke & Ufer, 2015). Mathematisches Begründen setzt deshalb auch entsprechendes mathematisches Grundwissen voraus (Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009), erfordert flexibles Anwenden von mathematischem Wissen und Strategien und führt in der Regel zu einem tieferen Verständnis für die vorliegenden Zusammenhänge und Gesetzmässigkeiten (De Villiers, 2010).

Zum mathematischen Begründen lassen sich verschiedene Teilkompetenzen beschreiben. Wichtig ist, dass mathematische Aussagen hinterfragt und hinsichtlich ihrer Korrektheit und Gültigkeit geprüft werden können, dass mathematische Zusammenhänge erkannt und Vermutungen entwickelt werden können und dass Begründungen gesucht und nachvollzogen werden können (Walther, van den Heuvel-Panhuizen, Granzer & Köller, 2008). Es geht also um Prozesse zur Herleitung, Überprüfung, Verifikation oder Falsifikation mathematischer Aussagen (Mejia-Ramos & Inglis, 2009). Diese Prozesse sind eng mit explorativen Tätigkeiten (Philipp, 2013) zum Finden von plausiblen Vermutungen (Reiss & Ufer, 2009) sowie mit angemessenen Formulierungsprozessen, beispielsweise einer sprachlichen oder formal-symbolischen Begründung, verbunden, aber nicht gleichbedeutend mit dem «mathematischen Kommunizieren[2]» von Lösungswegen oder dem Darstellen von mathematischen Problemen.

Aufgabenangebot zum Begründenlernen

Zur Förderung der Kompetenz des mathematischen Begründens sind wie in der Einleitung bereits ausgeführt entsprechende schulische Angebote notwendig. Im Mathematikunterricht wird das Angebot stark durch Schulbücher geprägt, die als die am häufigsten eingesetzten gedruckten Ressourcen im Unterricht dienen und als physisch manifeste Werkzeuge gelten, die eng mit Lehren und Lernen verbunden sind (Valverde et al., 2002). Schulbücher beeinflussen zum einen den Inhalt des Unterrichts und stellen zum anderen eine wichtige Quelle für Lerngelegenheiten dar. Empirisch belegt sind auch Zusammenhänge zwischen den in Schulbüchern enthaltenen und im Unterricht tatsächlich behandelten Themen, und zwar hinsichtlich des Inhalts und der dafür proportional aufgewendeten Unterrichtszeit (Schmidt et al., 2001; Valverde et al., 2002). Schulbücher definieren somit nicht nur die Inhalte, die sich Schülerinnen und Schüler aneignen sollen, sondern auch den Möglichkeitsraum und das Lernangebot (Jordan et al., 2006), mit dem sich Lernende befassen, weil sich Schulbücher an den in den Curricula verbindlich geregelten Anforderungen ausrichten und diese konkretisieren. Lehrmittel der gleichen Reihe unterliegen darüber hinaus ähnlichen Gestaltungsprinzipien (z. B. Wittmann, 2004).

Analysen von Schulbüchern liefern deshalb differenzierte Informationen zu potenziellen Lerngelegenheiten sowie zur möglichen Erklärung von Leistungen in Mathematik, weil sie Aufschluss darüber geben, ob Schülerinnen und Schüler einen Inhalt im Unterricht behandelt haben und welche Bedeutung dem Lerninhalt bei der Lehrmittelentwicklung beigemessen wird (Törnroos, 2005). Dies gilt selbst dann, wenn die Nutzung der Schulbücher durch die Schülerinnen und Schüler unterschiedlich erfolgt und sich die intendierte und die tatsächliche Nutzung leicht, aber nicht grundsätzlich unterscheiden (Rezat, 2009, 2011). In Bezug auf Letztere lässt sich für die deutsche Sekundarstufe (ab 5. Schuljahr) nachweisen, dass Mathematiklehrmittel von den Lernenden zur Bearbeitung von Aufgaben, zum Festigen, zum Erarbeiten von neuen Inhalten, zum interessemotivierten Lernen und für metakognitive Zwecke verwendet werden (Rezat, 2011). Dominierende Strukturelemente von Schulbüchern im Fach Mathematik sind zum einen die Aufgaben selbst und zum anderen kurze Zusatzinformationen, Lehrtexte oder Merkwissen (Rezat, 2011), wobei das Aufgabenangebot jedoch immer den Kern des Schulbuches ausmacht.

Begründungsaufgaben erfordern sowohl das Verbinden mathematischer Aussagen zu logischen Argumentationsketten sowie das kritische Bewerten verschiedener Formen mathematischer Argumentationen (Blum, Drüke-Noe, Hartung & Köller, 2012) und fördern dadurch deren Verstehen. Begründungsaufgaben können verschiedenen Anforderungsniveaus zugeordnet werden. Die Anforderungen beginnen beim Reproduzieren und Anwenden bekannter Argumentationsmuster im Sinne von Routineargumentationen sowie Begründen mit einfachen Beispielen und gehen über die Entwicklung von überschaubaren mehrschrittigen Argumentationen bis hin zum Nutzen, Erklären und Darlegen von komplexen Argumentationen (Leiss & Blum, 2006). Begründungen können auf unterschiedlichen Darstellungsebenen ausgedrückt werden, beispielsweise verbal-sprachlich oder ikonisch-zeichnerisch (Stylianides, 2016). Die Qualität einer Argumentation hängt zudem nicht ausschliesslich vom Grad der Formalisierung ab (Hanna, 1997), sondern von ihrer Kraft, einen Begründungszusammenhang schlüssig zu erklären und dadurch andere von deren Gültigkeit überzeugen zu können (Hersh, 1993).

Genuine Begründungsaufgaben müssen die spezifischen Begründungstätigkeiten in den Blick nehmen und nicht nur zum Beschreiben bzw. zum mathematischen Kommunizieren eines Vorgehens anregen, sondern auf das Herstellen und Erklären von mathematischen Zusammenhängen abzielen. Genuine Begründungsaufgaben sind deshalb kognitiv anspruchsvoll und können als Indikator für kognitiv aktivierenden Mathematikunterricht interpretiert werden (z. B. Schoenfeld, 2014).

Forschungsdesiderata und Forschungsfragen

Empirische Befunde aus der TIMS-Videostudie belegen für den deutschen Mathematikunterricht im Vergleich mit dem japanischen Mathematikunterricht ein insgesamt relativ niedriges Anspruchsniveau der Aufgabenstellungen (Neubrand, 2002). Dieses Ergebnis wurde z. B. in der COACTIV-Studie (Kunter et al., 2011) bezüglich kognitiver Aktivierung grundsätzlich bestätigt. Nahezu die Hälfte der Aufgaben, die in der zehnten Klasse in Klassenarbeiten eingesetzt wurden, rekurrierte lediglich auf Faktenwissen und auf technische mathematische bzw. rechnerische Fertigkeiten, während nur jede fünfundzwanzigste Aufgabe mathematisches Argumentieren verlangte (Drüke-Noe, 2014). Ein ähnliches Bild zeigte sich schulformübergreifend für die Hausaufgaben und die Einstiegsaufgaben im Mathematikunterricht (Neubrand, Jordan, Krauss, Blum & Löwen, 2011) sowie erneut für die Aufgaben in Klassenarbeiten (Baumert & Kunter, 2011; Drüke-Noe, 2014). Die Befunde von TIMSS und COACTIV haben massgeblich Fortbildungsbemühungen zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts initiiert.

Mittlerweile gelten sowohl im deutschen als auch im Schweizer Mathematikunterricht die neuen, auf Bildungsstandards beruhenden Curricula, welche mathematisches Argumentieren als zentrale Kompetenz ausweisen. In Anbetracht der starken Gewichtung dieser Kompetenz und des oben kurz rekapitulierten Forschungsstands dürfte es sich als aufschlussreich erweisen, das Aufgabenangebot von aktuellen Schulbüchern, die für sich in Anspruch nehmen, den neuen Anforderungen der Bildungsstandards zu entsprechen, im Detail zu untersuchen. Dieses Desiderat wurde vom Projekt MaBeLL («Mathematisches Begründen lehren und lernen») der Pädagogischen Hochschule Thurgau (Brunner, 2017) aufgenommen, in dessen Rahmen das vollständige Aufgabenangebot von je zwei aktuellen Mathematikbüchern für die fünfte bzw. die achte Klasse analysiert wurde. Die Wahl fiel auf die fünfte und die achte Klasse, weil sich diese beiden Jahrgänge in der Mitte eines Zyklus[3] bzw. einer bestimmten Schulstufe[4] befinden und somit bereits einiges an Mathematiklernen und –lehren vorausgegangen ist und innerhalb des Zyklus bzw. der Schulstufe noch folgen wird. Geklärt werden sollten insbesondere die folgenden Fragestellungen:

1. Wie gross ist der Anteil der Lernangebote in Form von Aufgaben zum Argumentieren, Begründen und Beweisen (genuine Begründungsaufgaben) in den einzelnen Mathematiklehrmitteln im Vergleich zu anderen Aufgabentypen?
2. Wie verteilen sich die genuinen Begründungsaufgaben auf die verschiedenen Kompetenzbereiche (Inhaltsbereiche: Zahl und Variable, Form und Raum, Grössen, Funktionen, Daten und Zufall) des Lehrplans 21 Mathematik (D-EDK, 2016)?

Die vorliegende Studie soll somit Auskunft über die Quantität von Begründungsaufgaben in insgesamt vier Lehrmitteln für die beiden ausgewählten

Jahrgangsstufen sowie über die Verteilung der Begründungsaufgaben auf die Kompetenzbereiche geben. Ziel ist eine Deskription des Angebotes.

Methode

Im Rahmen des Projektes MaBeLL der PHTG wurde in der Teilstudie «Mathematisches Begründen lehren und lernen: Lehrmittelanalyse («MaBeLL-LA») das Angebot an Argumentations-, Begründungs- und Beweisaufgaben in Mathematiklehrmitteln für die fünfte bzw. die achte Klasse, mittels eines Kodierleitfadens deskriptiv analysiert.

Datenkorpus

Das Datenkorpus bildeten die beiden Lehrmittel der fünften und achten Klasse im Fach Mathematik, die den Schulen im Kanton Thurgau zur Wahl angeboten werden. Es sind dies für die Primarstufe das «Schweizer Zahlenbuch» (Affolter, Amstad, Doebeli & Wieland, 2017) und «Mathematik» (Diener et al., 2015), für die Sekundarstufe 1 «mathbuch 2» (Affolter et al., 2014) und «Mathematik 2» (Keller, Bollmann, Rohrbach & Schelldorfer, 2012a). Beim «Schweizer Zahlenbuch» wurde auf die 2017 erschienene vollständige Neubearbeitung zurückgegriffen (Affolter et al., 2017).

Die beiden Schulbücher für dieselbe Klasse unterscheiden sich hinsichtlich ihres Aufbaus und ihrer Konzeption deutlich voneinander. Innerhalb der gleichen Reihe der Lehrmittel bleibt der Aufbau aber ähnlich. Beide Schulbuchreihen orientieren sich am neuen Deutschschweizer Lehrplan 21 (D-EDK, 2016). Untersucht wurde jeweils ein vollständiger Satz der aktuellen Ausgabe des Lehrmittels, d.h. das Schulbuch und das Arbeitsheft. Für die Schulbücher der achten Klasse liegt das Arbeitsheft jeweils für verschiedene Anforderungsniveaus vor. Einbezogen wurde dasjenige für die Grundansprüche, weil das minimale Aufgabenangebot für alle Lernenden und nicht nur jenes für die leistungsstarken Schülerinnen und Schüler interessiert.

Analyseeinheit

Um die Vergleichbarkeit mit Befunden aus anderen deutschsprachigen Studien zu gewährleisten, wurde dieselbe Definition der Analyseeinheit «Aufgabe» gewählt (Drüke-Noe, 2014; Jordan et al., 2006; Neubrand, 2002). Unter einer «Aufgabe» wurde die Aufforderung zur gezielten Bearbeitung und Auseinandersetzung mit einer spezifischen mathematischen Situation bzw. einem Beispiel eines Sachverhalts (Neubrand, 2002) verstanden. Viele Aufgaben sind in Teilaufgaben gegliedert und beinhalten mehrere Handlungsaufforderungen. Wird an den engen Aufgabenbegriff (Jordan et al., 2006; Neubrand, 2002) angeknüpft, ist die Handlungsaufforderung die kleinste zusammenhängende inhaltsbezogene Einheit, die den Bearbeiter bzw. die Bearbeiterin einer Aufgabe dazu auffordert, innerhalb eines eingegrenzten mathematischen Themenbereichs eine prozess- oder produktorientierte mathematische Tätigkeit auszuführen. Diese einzelne Handlungsaufforderung wurde als Analyseeinheit für die vorliegende Studie festgelegt.

Im konkreten Fall bedeutet diese Definition der Handlungsaufforderung als Analyseeinheit, dass die in Lehrmitteln jeweils nummerierten Aufgaben mehrere Analyseeinheiten umfassen können. So besteht beispielsweise die folgende Aufgabe (Abbildung 1) aus drei Analyseeinheiten: Aufgabe a verlangt die Berechnung von Summen sowie eine Beschreibung für eine mögliche Feststellung und umfasst somit zwei Analyseeinheiten. Aufgabe b erfordert erneut die Berechnung der Summe aller Kehrwerte der Teiler sowie das Prüfen einer auf dieser Basis erarbeiteten Feststellung mit derjenigen aus Aufgabe a und umfasst deshalb ebenfalls zwei Analyseeinheiten. Aufgabe c hingegen verlangt, das Zustandekommen der Beobachtungen in a und b zu begründen. Es handelt sich somit um eine Analyseeinheit.

Jede natürliche Zahl kannst du auch als Bruch schreiben.

Beispiel: $6 = \frac{6}{1}$

Und dann kannst du seinen Kehrwert notieren: $\frac{1}{6}$

a Bilde die Summe aller Kehrwerte der Teiler der vollkommenen Zahl 6.
Was stellst du fest?

b Überprüfe das auch mit der nächsten vollkommenen Zahl 28.

c Suche nach einer Begründung für deine Vermutung.

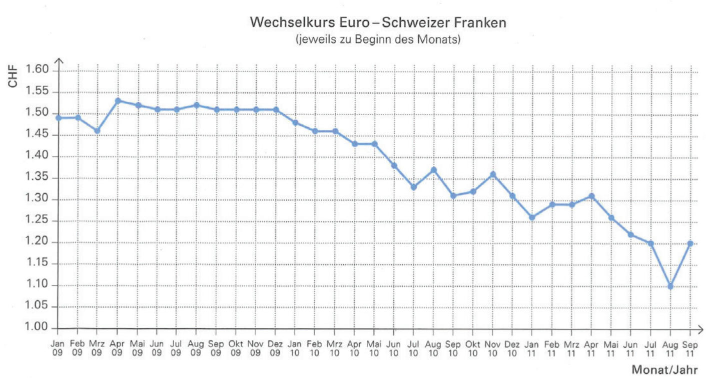
Abbildung 1: Beispiel «Analyseeinheit» (Keller, Bollmann, Rohrbach & Schelldorfer, 2012b, S. 65)

Instrument

Für die Lehrmittelanalyse wurde ein ausführlicher Kodierleitfaden entwickelt, der das Kodiersystem im Einzelnen beschreibt und mittels Ankerbeispielen klärt, wie die einzelnen Kodes zu interpretieren sind (Brunner & Jullier, 2016). Die Kodierung des vollständigen Angebotes erfolgte in drei Schritten: In einem ersten Schritt wurde die Analyseeinheit identifiziert. Danach wurde jede Analyseeinheit bezüglich des Aufgabentyps (genuine Begründungsaufgabe, unechte Begründungsaufgabe und anderer Aufgabentyp; siehe unten) eingeschätzt. Schliesslich wurde jede Analyseeinheit inhaltlich demjenigen Kompetenzbereich aus dem Lehrplan 21 (D-EDK, 2016) zugeteilt, auf den sie hauptsächlich abzielt (Zahl und Variable, Form und Raum, Grössen, Funktionen, Daten und Zufall). Im vorliegenden Beitrag werden zum inhaltlichen Kompetenzbereich lediglich diejenigen Befunde berichtet, die sich auf die genuinen Begründungsaufgaben beziehen.

Die im zweiten Schritt vorgenommene Unterscheidung zwischen genuinen und unechten Begründungsaufgaben wurde wie folgt getroffen: Unter «genuinen Begründungsaufgaben» wurden nur solche verstanden, die beispielhafte oder allgemeine Einsichten ermöglichen und sich mit der Erklärung und Begründung von mathematischen Zusammenhängen oder Beziehungen befassen (siehe Beispielaufgabe c in Abbildung 1). Unter «unechten[5] Begründungsaufgaben» wurden demgegenüber jene Aufgaben subsumiert, die Handlungsaufforderungen enthalten, die oberflächlich betrachtet auf die Einforderung einer Begründung schliessen lassen. Tatsächlich verlangen diese Aufgaben jedoch die Darlegung, Beschreibung, Präsentation, Interpretation oder Bewertung einer Rechnung oder eines Lösungsweges oder die Begründung einer Vorgehensweise. Weder eine mathematische Verallgemeinerung, noch mathematische Einsicht in allgemeine Strukturen und Zusammenhänge oder das Finden einer plausiblen Begründung für mathematische Zusammenhänge sind intendiert. Der Imperativ «begründe» (und ähnliche Aufforderungen) wird in diesen Aufgaben in nicht zutreffender Weise verwendet. Ein Beispiel für eine sogenannt «unechte Begründungsaufgabe» ist in Abbildung 2 ersichtlich. In Aufgabe a wird mit dem Verb «begründe» zwar eine Begründungsaufgabe angezeigt. Aber die Beantwortung erfordert lediglich einen Vergleich der beiden im Graphen enthaltenen Wechselkurse für die beiden angegebenen Zeitpunkte (und ggf. eine Kursberechnung) und zielt somit auf das Interpretieren von Graphen ab.

Der Wechselkurs Euro – Schweizer Franken ändert sich im Laufe der Zeit. Die Grafik zeigt die starken Wechselkursänderungen vom Januar 2009 bis zum September 2011.
Der schwankende Wechselkurs ist für die Wirtschaft, für die Konsumenten und für die Touristen entweder ein Vor- oder ein Nachteil.



a Du möchtest nach Deutschland in die Ferien reisen und wechselst CHF in Euro. Ist für dich ein tiefer oder ein hoher Wechselkurs vorteilhaft? Begründe deine Entscheidung mit Hilfe der Werte der Grafik für zwei Zeitpunkte zwischen dem Januar 2009 und dem September 2011.

Abbildung 2: Beispiel «unechte Begründungsaufgabe» (Keller et al., 2012b, S. 149)

Zur dritten Subkategorie «andere Aufgaben» gehören Aufgaben, deren Lösung Handlungen wie Operieren, Benennen, Mathematisieren, Darstellen oder Erforschen bedingt.

Kodierung und Analyse

Die Kodierung wurde von zwei Personen durchgeführt. Zunächst wurde nach einem Training mit denselben Schulbüchern aus jeweils zwei anderen Schuljahren («Schweizer Zahlenbuch 6», «Mathematik 6», «mathbuch 1» und «Mathematik 1» für die Sekundarstufe) eine Probekodierung in Form einer Parallelkodierung von gemeinsam festgelegten Analyseeinheiten durchgeführt. Nach der Überprüfung der Interraterreliabilität wurden die Unstimmigkeiten besprochen. Basierend auf der Probekodierung wurde der Kodierleitfaden fortlaufend überarbeitet und spezifiziert. Die Parallelkodierung am Material der Probekodierung wurde so lange fortgesetzt, bis die Interraterreliabilität (> 80 %; Cohens Kappa = .82) zufriedenstellend war. Anschliessend wurde die Lehrmittelanalyse von zwei Kodierenden vorgenommen. Nachdem die Kodierung beider Lehrmittel der beiden Klassenstufen abgeschlossen war, wurde die Kodierung der genuinen und der unechten Begründungsaufgaben von einer der beiden Kodierenden überprüft. Dabei wurden alle als genuine bzw. als unechte Begründungsaufgaben analysierten Analyseeinheiten ein weiteres Mal betrachtet, um die Vergabe der Kodes zu verifizieren. Dieser Schritt wurde deshalb vorgenommen, weil in den Schulbüchern insgesamt nur sehr wenige genuine Begründungsaufgaben gefunden wurden und sichergestellt werden sollte, dass dieser sehr selten auftretende Aufgabentyp einheitlich kodiert worden war.

Ergebnisse

Insgesamt wurden in den vier Lehrmitteln 16’662 Aufgaben kodiert. In den beiden Primarschullehrmitteln wurden 3›529 («Schweizer Zahlenbuch 5») bzw. 6›733 («Mathematik 5») Aufgaben kodiert. In den Lehrmitteln der achten Klasse waren es insgesamt 3›614 in («mathbuch 2») bzw. 2786 («Mathematik 2») Aufgaben. Ausgehend von dieser Datenbasis konnte im zweiten Analyseschritt festgestellt werden, wie gross der Anteil an genuinen Begründungsaufgaben in den beiden Mathematiklehrmitteln der beiden Klassen ausfällt und aus welchen Kompetenzbereichen die genuinen Begründungsaufgaben stammen. Zunächst wurden die Ergebnisse für die je zwei Lehrmittel der beiden Klassenstufen einzeln betrachtet und vergleichend analysiert (Tabelle 1).

Tabelle 1: Verteilung der Analyseeinheiten auf die drei Aufgabentypen (absolute Werte und Prozentsätze)

	Reihe A: «Schweizer Zahlenbuch 5» (PS)	**Reihe B: «Mathematik 5» (PS)**	**Reihe A: «mathbuch 2» (Sek I)**	**Reihe B: «Mathematik 2» (Sek I)**
Genuine BA	25 (0.7 %)	39 (0.6 %)	102 (2.8 %)	83 (3.0 %)
Unechte BA	1 (0.03 %)	27 (0.4 %)	8 (0.2 %)	30 (1.1 %)
Anderer Aufgabentyp	3503 (99.3 %)	6667 (99.0 %)	3504 (97.0 %)	2673 (95.9 %)
Gesamt	3529 (100.0 %)	6733 (100.0 %)	3614 (100.0 %)	2786 (100.0 %)

Anmerkung: BA = Begründungsaufgaben. PS = Primarstufe. Sek I = Sekundarstufe I.

Wird die Anzahl der kodierten Analyseeinheiten der beiden Lehrmittel für die fünfte Klasse verglichen, lässt sich feststellen, dass im Lehrmittel «Mathematik 5» fast doppelt so viele Analyseeinheiten kodiert wurden wie im «Schweizer Zahlenbuch 5» (6733 vs. 3529). Die ermittelte Anzahl Aufgaben ist in den beiden Schulbüchern der achten Klasse ebenfalls unterschiedlich. Das Lehrmittel «mathbuch 2» weist rund einen Viertel mehr Aufgaben auf als «Mathematik 2», dies obwohl beide Lehrmittel je den Stoff für ein Schuljahr umfassen.

Werden die relativen Häufigkeiten der einzelnen Aufgabentypen verglichen, so zeigt sich bei den Mathematiklehrmitteln der fünften Klasse ein weitgehend ähnliches Bild: Sowohl genuine als auch unechte Begründungsaufgaben kommen mit weniger als 1 % des Aufgabenangebotes in den beiden Lehrmitteln kaum vor. Bei den Lehrmitteln für das achte Schuljahr ist der Anteil genuiner Begründungsaufgaben in den beiden Lehrmitteln vergleichbar gering, aber etwas grösser als im Angebot für das fünfte Schuljahr.

Beim Vergleich des Angebots bezüglich der Aufgabentypen der Lehrmittel derselben Lehrmittelreihe für die fünfte und die achte Klasse zeigt sich, dass die Anzahl der kodierten Aufgaben in beiden Büchern der Lehrmittelreihe A («Schweizer Zahlenbuch»/»mathbuch») ungefähr gleich gross ist, während das Aufgabenangebot der Lehrmittelreihe B («Mathematik 5»/»Mathematik 2») für die fünfte Klasse deutlich umfangreicher ausfällt als für die achte Klasse. Im Vergleich zum Angebot für das fünfte Schuljahr liegen in beiden Lehrmitteln im achten Schuljahr zwar leicht mehr genuine Begründungsaufgaben vor, aber das Angebot an genuinen Begründungsaufgaben fällt insgesamt betrachtet auch für das achte Schuljahr gering aus.

Teilt man die wenigen genuinen Begründungsaufgaben den fünf Kompetenzbereichen zu (Tabelle 2), zeigt sich, dass in drei der vier Schulbücher die Mehrheit der Aufgaben aus dem Bereich «Zahl und Variable» stammt, während im Lehrwerk «Mathematik 2» für das achte Schuljahr der grösste Anteil den Inhaltsbereich «Form und Raum» betrifft.

Tabelle 2: Verteilung der genuinen Begründungsaufgaben auf die Kompetenzbereiche (absolute Werte und Prozentsätze)

	Reihe A: «Schweizer Zahlenbuch 5» (PS)	**Reihe B: «Mathematik 5» (PS)**	**Reihe A: «mathbuch 2» (Sek I)**	**Reihe B: «Mathematik 2» (Sek I)**
Zahl und Variable	11 (44.0 %)	25 (64.1 %)	47 (46.1 %)	8 (9.6 %)
Form und Raum	1 (4.0 %)	7 (18.0 %)	19 (18.6 %)	49 (59.0 %)
Grössen	3 (12.0 %)	0 (0.0 %)	0 (0.0 %)	3 (3.6 %)
Funktionen	0 (0.0 %)	0 (0.0 %)	5 (4.9 %)	18 (21.7 %)
Daten und Zufall	10 (40.0 %)	7 (18.0 %)	31 (30.4 %)	5 (6.0 %)
Gesamt	25 (100.0 %)	39 (100.0 %)	102 (100.0 %)	83 (100.0 %)

Aus dem Inhaltsbereich «Daten und Zufall» weist Lehrmittelreihe A («Schweizer Zahlenbuch 5»/»mathbuch 2») einen deutlich höheren Anteil genuiner Begründungsaufgaben auf als Lehrmittelreihe B («Mathematik 5»/»Mathematik 2»). Im Bereich «Funktionen» wurden in den beiden Lehrwerken für das fünfte Schuljahr keine genuinen Begründungsaufgaben ermittelt, für das achte Schuljahr ist der Anteil genuiner Begründungsaufgaben in «Mathematik 2» deutlich höher als in «mathbuch 2». In allen vier analysierten Lehrmitteln sind kaum genuine Begründungsaufgaben aus dem Bereich «Grössen» zu finden.

Diskussion

Ziel der Studie war die Beschreibung des Angebots an Begründungsaufgaben in je zwei unterschiedlichen Lehrmitteln für die fünfte und die achte Klasse. Die Ergebnisse zeigen, dass das Angebot an genuinen Begründungsaufgaben, d.h. Aufgaben, die auf Erklären und Begründen von mathematischen Zusammenhängen oder Beziehungen abzielen, in beiden Lehrmittelreihen und für beide Klassenstufen sowohl quantitativ als auch bezüglich inhaltlicher Vielfalt stark limitiert ist. Es kommen kaum genuine Begründungsaufgaben vor, obwohl sämtliche analysierten Lehrmittel angeben, sich am Lehrplan 21 (D-EDK, 2016) zu orientieren. Insbesondere im fünften Schuljahr fällt der Anteil genuiner Begründungsaufgaben sehr klein aus, nicht einmal jede hundertste Aufgabe ist eine genuine Begründungsaufgabe. Obwohl das Angebot an genuinen Begründungsaufgaben in den Lehrmitteln für das achte Schuljahr umfangreicher ist, gehören weniger als ein Zwanzigstel der Aufgaben zu diesem Typ. Die Ergebnisse zum geringen Anteil von Begründungsaufgaben in Lehrmitteln sind konsistent mit denjenigen von Drüke-Noe (2014) bezüglich Klassenarbeiten im zehnten Schuljahr in Deutschland. Es scheint sich somit nicht um ein singuläres Resultat zu handeln, sondern eher um ein generell vorherrschendes, problematisches Muster im Aufgabenangebot.

Über beide Lehrmittel und Stufen gesehen dominieren genuine Begründungsaufgaben mit Fokus auf den Kompetenzbereichen «Zahl und Variable» und «Form und Raum». Trotz identischen Curriculums können (leicht) unterschiedliche inhaltliche Schwerpunktsetzungen nach Kompetenzbereichen in den Lehrmitteln festgestellt werden und zwar bezüglich Jahrgangsstufe wie bezüglich Lehrmittelreihe. Dass das Aufgabenangebot des Lehrmittels «Mathematik» für das achte Schuljahr zur Hauptsache den Kompetenzbereich «Form und Raum» betrifft, dürfte mit dem in diesem Schuljahr zu bearbeitenden Satz des Pythagoras zusammenhängen. Es wäre deshalb zu überprüfen, ob sich diese inhaltliche Dominanz auch im neunten Schuljahr zeigt und somit als Unterschied zwischen den beiden Schulstufen Mittelstufe (fünfte Klasse) und Sekundarstufe (achte Klasse) interpretiert werden kann oder ob das Aufgabenangebot des Lehrmittels «Mathematik» für das achte Schuljahr diesbezüglich als Besonderheit betrachtet werden kann. Die Tatsache, dass dieser Befund für «mathbuch 2» nicht gilt, lässt eher auf eine besondere Fokussierung im Lehrmittel «Mathematik 2» schliessen.

Insgesamt zeigen sich aber mehr Gemeinsamkeiten als Unterschiede für den Anteil gefundener echter Begründungsaufgaben in den Lehrmitteln. Dies ist auch deshalb ein bedeutsames Ergebnis, weil es sich bei den beiden Lehrmittelreihen um die beiden aktuell in der Deutschschweiz am stärksten verbreitetsten handelt. Beide Lehrmittel bieten – mit Nuancen – ein ähnlich kleines Angebot an Begründungsaufgaben an. Dass die Varianz bezüglich der Häufigkeit von Begründungsaufgaben zwischen den beiden unterschiedlichen Lehrmitteln derselben Klassenstufe gering ist, mag erstaunen, könnte aber damit zusammenhängen, dass eine Varianz innerhalb eines kleinen Wertebereichs insgesamt nicht mehr gross ausfällt.

Das spärliche Angebot an Begründungsaufgaben zeigt auf, dass eine Diskrepanz zwischen dem Anspruch der Bildungsstandards und dem für die Praxis des Mathematikunterrichts verfügbaren Aufgabenangebot besteht. Lehrpersonen sehen sich einerseits in der Verantwortung, mathematisches Begründen in ihren Klassen zu fördern und diese Kompetenzen bei allen Lernenden aufzubauen, und können andererseits nicht auf ein entsprechend umfangreiches und vielfältiges Aufgabenangebot in den offiziellen Lehrmitteln zurückgreifen. Es braucht deshalb einen gezielten Ausbau des Aufgabenangebots zum mathematischen Begründen, damit reichhaltige und vielfältige Lernumgebungen zu unterschiedlichen mathematischen Kompetenzbereichen bereitgestellt werden können – und dies nicht nur für das fünfte und achte Schuljahr, sondern generell für die ganze Pflichtschulzeit.

Die vorliegende Studie unterliegt verschiedenen Limitationen: Sowohl die Definition von «genuinen Begründungsaufgaben» sowie diejenige der Analyseeinheit sind eng gefasst. Dies ermöglicht eine Vergleichbarkeit mit anderen Studien aus dem deutschsprachigen Raum (z. B. Drüke-Noe, 2014), führt aber möglicherweise dazu, dass die Anzahl von «genuinen Begründungsaufgaben» in zweifacher Hinsicht unterschätzt wird – inhaltlich sowie strukturell. Inhaltlich vernachlässigt die Engführung der Definition «genuine Begründungsaufgabe» vorbereitende Tätigkeiten wie beispielsweise das Begründen anhand von interpretierten Daten oder anhand eines errechneten Resultates, wie dies beispielsweise bei den «unechten Begründungsaufgaben» der Fall ist. Angesichts der Tatsache, dass nur wenige unechte Begründungsaufgaben gefunden wurden, scheint dies aber nicht stark ins Gewicht zu fallen, denn auch die Gruppe «Begründungsaufgaben» (echt und unecht) ist gegenüber «anderen Aufgaben» deutlich untervertreten. Schwerer wiegt ein zweiter inhaltlicher Grund für eine mögliche Unterschätzung: Begründen setzt eine entsprechende Wissensbasis voraus. Diese wird in Aufgabenstellungen oft zuerst erarbeitet, beispielsweise indem eine bestimmte Operation ausgeführt werden muss, um einen systematischen Zusammenhang überhaupt erkennen zu können, was dazu führt, dass Begründungsaufgaben oft nicht ohne vorhergehende «andere Aufgaben» sinnvoll möglich sind.

Eine mögliche Unterschätzung der Anzahl Begründungsaufgaben könnte zudem auch in struktureller Hinsicht vorliegen: Strukturell vernachlässigt die definitorische Engführung der Analyseeinheit die zeitliche Dimension der Bearbeitung sowie deren kognitiven Anspruch. Auch wenn es sich bei einer Begründungsaufgabe um *eine* Analyseeinheit handelt, ist davon auszugehen, dass das Finden und Formulieren einer Begründung zeitintensiver ist als das Ausführen einer Routineoperation. Gleiches gilt auch für den damit verbundenen kognitiven Anspruch. Dazu wären vertiefte qualitative Aufgabenanalysen notwendig, die den vorliegenden Überblick über die Anzahl und Inhaltsbereiche von Begründungsaufgaben in Lehrmitteln ergänzen. Dennoch stellt die quantitative Bestimmung des Aufgabenangebotes in weit verbreiteten Lehrmitteln einen ersten wichtigen Schritt dar und bietet eine Diskussionsgrundlage bezüglich Art und Umfang von Aufgaben zur Förderung der verschiedenen mathematischen Kompetenzen.

Anmerkungen

1 Aufgaben aus Klassenarbeiten widerspiegeln in der Regel die Aufgabenkultur des entsprechenden Unterrichts und erlauben «valide Rückschlüsse auf die Schwerpunkte des Unterrichts» (Kunter et al., 2006, S. 170). Sie geben Auskunft über «den normativen Anspruch einer Lehrkraft, an das, was die Schülerinnen und Schüler schliesslich gelernt haben sollen» (Drüke-Noe, 2014, S. 7) und zeigen die «Quintessenz der bearbeiteten Inhalte» (Jordan et al., 2008, S. 84).

2 «Mathematisch Kommunizieren» wird in den deutschen Bildungsstandards (Leiss & Blum, 2006) als eigene Kompetenz ausgewiesen und unterscheidet sich von der Kompetenz «mathematisch Argumentieren». Beim mathematischen Kommunizieren geht es darum, einen Lösungsweg zu erläutern, beim mathematischen Argumentieren ist hingegen eine explizite oder implizite logische Argumentation bzw. Argumentationskette erforderlich. Die Deutschschweizer Bildungsstandards (D-EDK, 2016) subsumieren Aspekte des mathematischen Kommunizierens im Handlungsaspekt «Mathematisieren & Darstellen».

3 Zyklus 2: Klasse 3-6; Zyklus 3: Klasse 7-9.

4 Mittelstufe: 4.-6. Klasse; Sekundarstufe I: 7.-9. Klasse.

5 Der Begriff «unecht» nimmt keine Wertung vor, sondern bezieht sich auf die Verwendung des Verbes «begründen» im Sinne der getroffenen Definition.

Literatur

Affolter, W., Amstad, H., Doebeli, M. & Wieland, G. (2017). *Schweizer Zahlenbuch 5*. Baar: Klett und Balmer.

Affolter, W., Beerli, G., Hurschler, H., Jaggi, B., Jundt, W., Krummenacher, R., Nydegger, A., Wälti, B. & Wieland, G. (2014). *Mathbuch 2. Mathematik für die Sekundarstufe I.* Baar: Klett und Balmer.

Baumert, J. & Kunter, M. (2011). Das mathematikspezifische Wissen von Lehrkräften, kognitive Aktivierung im Unterricht und Lernfortschritte von Schülerinnen und Schülern. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 163–192). Münster: Waxmann.

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg.). (2012). *Bildungsstandards Mathematik: Konkret Sekundarstufe 1: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*. Berlin: Cornelsen.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Berlin: Springer.

Brunner, E. (2017). *Mathematisches Begründen Lehren und Lernen.* Kreuzlingen: PH Thurgau.

Brunner, E. & Jullier, R. (2016). *Kodiersystem für die Analyse des Aufgabenangebots im Fach Mathematik. Spezifische Analyse der Quantität und Qualität von Begründungsaufgaben* (Vollversion). Kreuzlingen: PH Thurgau.

CIIP. (2010). *Plan d'études romand. Mathématiques.* Abgerufen von www.plandetudes.ch

De Villiers, M. (2010). Experimentation and Proof in Mathematics. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics* (pp. 205–221). Dodrecht: Springer.

D-EDK. (Hrsg.). (2016). *Lehrplan 21. Mathematik.* Abgerufen von www.lehrplan21.ch

Diener, M., Keller, B., Kummer, V., Meyer-Rieser, E., Schelldorfer, R., Studer Brodmann, H. & Keller, R. (2015). *Mathematik 5.* Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

Drüke-Noe, C. (2014). *Aufgabenkultur in Klassenarbeiten im Fach Mathematik. Empirische Untersuchungen in neunten und zehnten Klassen*. Wiesbaden: Springer.

Glasnovic Gracin, D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: A five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(7), 1003–1024.

Hanna, G. (1997). The ongoing value of proof. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *18*(2/3), 171–185.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 389–399.

Jahnke, H. N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331–355). Heidelberg: Springer Spektrum.

Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Blum, W., Neubrand, M., Brunner, M., Kunter, M. & Baumert, J. (2008). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *29*(2), 83–107.

Jordan, A., Ross, N., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Löwen, K., Brunner, M. & Kunter, M. (2006). *Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenkategorisierung im COACTIV-Projekt*. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Keller, F., Bollmann, B., Rohrbach, C. & Schelldorfer, R. (2012a). *Mathematik 2.* Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

Keller, F., Bollmann, B., Rohrbach, C. & Schelldorfer, R. (2012b). *Mathematik 1. Arbeitsheft.* Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

KMK. (2005). *Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz. Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung.* München: KMK.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss S. & Neubrand, M. (Hrsg.). (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften – Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann.

Kunter, M., Dubberke, T., Baumert, J., Blum, W., Brunner, M., Jordan, A., Klusmann, U., Löwen, K. Neubrand, M. & Tsai, Y.-M. (2006). Mathematikunterricht in den PISA-Klassen 2004: Rahmenbedingungen, Formen und Lehr-Lernprozesse. In PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.), *PISA 2003. Untersuchungen zur Kompetenzentwicklung im Verlauf eines Schuljahres* (S. 161–194). Münster: Waxmann.

Leiss, D. & Blum, W. (2006). Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: Konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen.* (S. 33–50). Berlin: Cornelsen.

Mejia-Ramos, J. P. & Inglis, M. (2009). What are the argumentative activities associated with proof? *Research in Mathematics Education*, *11*(1), 77–87.

National Council of Teachers of Mathematics. (Eds.). (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Neubrand, J. (2002). *Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen: Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie*. Hildesheim: Franzbecker.

Neubrand, M., Jordan, A., Krauss, S., Blum, W. & Löwen, K. (2011). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Einblicke in das Potenzial für kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 115–132). Münster: Waxmann.

Philipp, K. (2013). *Experimentelles Denken: Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz.* Wiesbaden: Springer.

Reid, D. A. & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education. Research, learning and teaching*. Rotterdam: Sense Publisher.

Reiss, K. (2002). *Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht. Projektserver SINUS.* Bayreuth: Universität.

Reiss, K. & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen. *JB DMV*, *111*(4), 155–177.

Rezat, S. (2009). *Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers: Eine Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Rezat, S. (2011). Wozu verwenden Schüler ihre Mathematikschulbücher? Ein Vergleich von erwarteter und tatsächlicher Nutzung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *32*(2), 153–177.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Housang, R. T., Wang, H. C., Wiiley, D. E., Cogan, L. S. & Wolfe, R. G. (2001). *Why schools matter: Using TIMSS to investigate curriculum and learning.* San Francisco (CA): Jossey-Bass Publishers.

Schoenfeld, A. H. (2014). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? *Educational Researcher*, *43*(8), 404–412.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289–321.

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford: University Press.

Törnroos, J. (2005). *Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement.* *31*(4), 315–327.

Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S. & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *30*(1), 30–54.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. & Housang, R. T. (2002). *According to the Book Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht: Kluwer.

Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D. & Köller, O. (Hrsg.). (2008). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret.* Berlin: Cornelsen.

Wittmann, E. C. (2004). Was ist Mathematik und was bedeutet dies für die Entwicklung von Lehrmitteln für den Mathematikunterricht? In C. Aeberli (Hrsg.), *Lehrmittel neu diskutiert* (S. 27–39). Zürich: Avenir Suisse.

Schlagworte: Mathematikunterricht, Lehrmittelanalyse, mathematisches Begründen, Aufgabenanalyse

Proposition d'exercices de raisonnement mathématique dans deux manuels mathématiques actuels

Résumé

Le raisonnement est considéré comme une compétence mathématique clé. Pour pouvoir l'acquérir, les élèves ont besoin d'un large éventail d'exercices que l'on trouve généralement dans des manuels scolaires. Pour cette raison, nous nous intéressons à la manière dont ces exercices sont présentés dans les manuels scolaires. En se basant sur l'analyse de deux manuels différents (5^{e} et 8^{e} années), la présente étude met en lumière, d'une part, le pourcentage d'exercices de raisonnement par rapport à l'ensemble des exercices proposés et indique, d'autre part, les compétences auxquelles ces derniers se réfèrent. Les résultats montrent un écart entre la nécessité de promouvoir adéquatement une telle compétence et l'offre existante d'exercices.

Mots-clés: Éducation mathématique, analyse des manuels scolaires, raisonnement mathématique, analyse des exercices

Proposta di esercizi sul ragionamento matematico in due manuali di matematica attuali

Riassunto

Il ragionamento è una competenza matematica centrale. Affinché questa possa essere acquisita dai discenti, è necessaria una vasta gamma di esercizi mirati che figurano generalmente nei manuali scolastici. È quindi interessante osservare come questi compiti siano presentati nei libri di testo. Sulla base dell'analisi di due diversi manuali (5o e 8o anno), il presente studio, da un lato, evidenzia la percentuale di esercizi di ragionamento rispetto all'insieme degli esercizi proposti, dall'altro indica le competenze alle quali rimandano questi ultimi. I risultati mostrano una discordanza tra l'esigenza di promuovere adeguatamente tale competenza e la proposta dei relativi esercizi.

Parole chiave: Insegnamento della matematica, analisi di manuali scolastici, ragionamento matematico, analisi di esercizi

Reasoning Problems in Current Mathematics Textbooks

Summary

Reasoning is considered to be a central mathematical skill. In order to acquire this skill, students need to be provided with a rich variety of suitable problems. In mathematics education, such problems are usually part of textbooks. We were therefore interested in the composition of current mathematics textbooks. Our study included two different textbooks for fifth-grade students and two different textbooks for eighth-grade students. We first determined the proportion of reasoning problems in the narrow sense in relation to the total number of problems in the books and then classified them according to the areas of the competence framework for mathematics education. The results of our analyses point to a discrepancy between the demands that are placed on the fostering of this skill and the problems that are actually available.

Keywords: Mathematics education, textbook analysis, mathematical reasoning, task analysis

Esther Brunner, Prof. Dr., Ausbildung zur Primarlehrerin mit langjähriger Unterrichtstätigkeit, Nachdiplomstudium Mathematikdidaktik an der Universität Bern, Studium und Promotion mit einer Arbeit zum innermathematischen Beweisen in der Sekundarstufe I an der Universität Zürich, z. Z. Leiterin Professur Mathematikdidaktik und Dozentin für Mathematikdidaktik, Pädagogik und Sonderpädagogik an der PHTG.
Forschungsgebiete: Beweisen, mathematisches Argumentieren; Qualität des Mathematikunterrichts; Mathematikunterricht in unterschiedlichen Kontexten, frühe mathematische Bildung.
Pädagogische Hochschule Thurgau, Unterer Schulweg 3, CH-8280 Kreuzlingen
E-mail: esther.brunner@phtg.ch

Romaine Jullier, MA Secondary Education; Ausbildung zur Sekundarlehrerin und Studium Fachdidaktik Mathematik, z. Z. Lehrbeauftragte Mathematikdidaktik und wissenschaftliche Mitarbeiterin Mathematikdidaktik an der PHTG.
Schwerpunkte: Mathematisches Begründen, Argumentieren und Beweisen.
Pädagogische Hochschule Thurgau, Unterer Schulweg 3, CH-8280 Kreuzlingen
E-Mail: romaine.jullier@phtg.ch

Jonas Lampart, MSc; Ausbildung zum Primarlehrer und Studium in Erziehungswissenschaft, z. Z. Primarlehrer sowie Lehrbeauftragter Mathematikdidaktik und wissenschaftlicher Mitarbeiter Mathematikdidaktik an der PHTG.
Schwerpunkte: Altersdurchmischtes Lehren und Lernen, Überzeugungen von Lehrpersonen, mathematisches Begründen und Argumentieren.
Pädagogische Hochschule Thurgau, Unterer Schulweg 3, CH-8280 Kreuzlingen
E-Mail: jonas.lampart@phtg.ch